Gabarito da Prova Oficial do dia 30 de Março de 2012

Questão 1 – Língua Estrangeira, 7 pontos

Um ano tem 365 ou 366 dias. No "pior" caso, poderia se ter 366 dias de aniversários diferentes, mas como na aldeia de Nicole vivem mais de 400 habitantes, é certo que duas pessoas fazem aniversário no mesmo dia.
No caso do código PIN dos celulares com 4 dígitos, o número de possibilidades para compor um código é igual a 10^4. Portanto, para 10 milhões de telefones há pelo menos $10^7/10^3 = 10^4$ de proprietários utilizando o mesmo código para seu telefone. Como eles são mais de 366 também, haverá pelo menos dois habitantes na cidade de Lazlo que fazem aniversário no mesmo dia.

Questão 2 – *Em todos os sentidos*, 5 pontos

O maior palíndromo de 5 dígitos é 99 999. Utilizando-se uma calculadora temos que $\sqrt{99\,999} \approx 316{,}22\ldots$
Isso limita a pesquisa a palíndromos de 3 dígitos com valor abaixo 316.
Por tentativa e erro, calculamos 313^2, 303^2, 292^2 .. que não são palíndromos até concluirmos que a solução é 212, pois **$212^2 = 44\,944$** .

Questão 3 – *Vamos pesar*? 7 pontos

Conclui-se que os "massores" a serem utilizados devem ter massas ("pesos") iguais a 1, 3 e 9, de maneira que cada pesagem será feita da seguinte maneira:

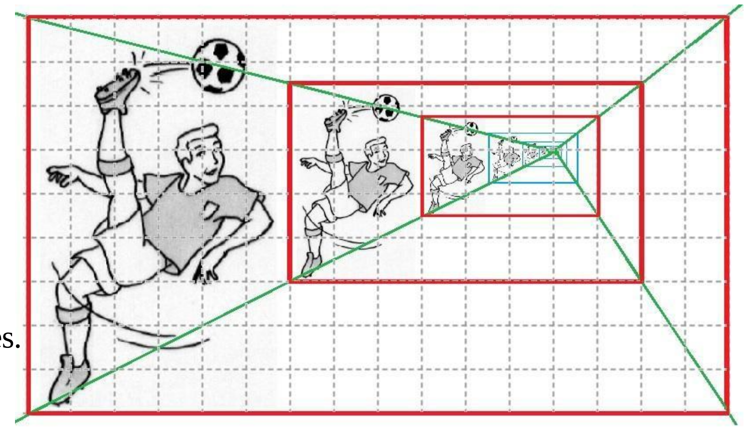
1=1 2=3-1 3=3 4=3+1 5=9-3-1 6=9-3 7=9-3+1 8=9-1 9=9 10=9+1
11=9+3-1 12=9+3 13=9+3+1

Questão 4 – *Telas*, 5 pontos

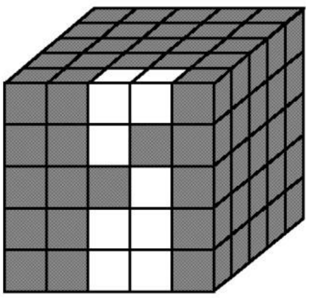
Constata-se que a taxa de redução é ½.

Para responder a questão, apenas os primeiros três retângulos são necessários.

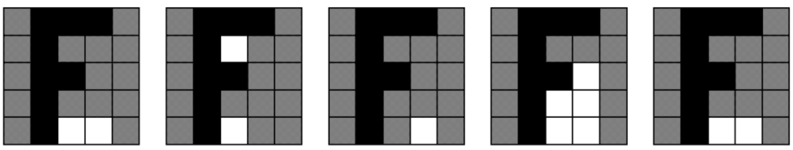
Se as suas posições relativas forem desenhadas corretamente, as retas verdes serão concorrentes.



Questão 5 – *Recheio de cubos*, 7 pontos



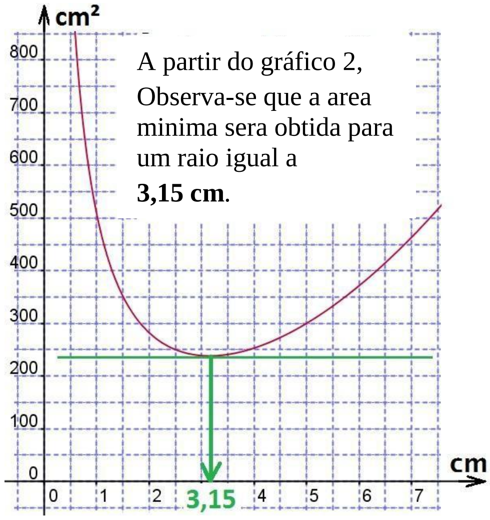
Ao lado temos o cubo depois de ter sido "cortada" uma face de cada um de seus lados.
Você pode contar os cubos brancos por níveis, contando-se 12 no total.



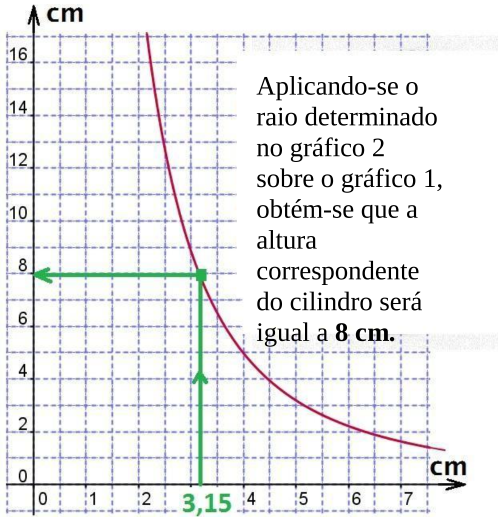
couche 1 couche 2 couche 3 couche 4 couche 5

Nota: também pode-se contar por fatias verticais, frontais ou laterais.

Questão 6 – *A mais justa*, 5 pontos

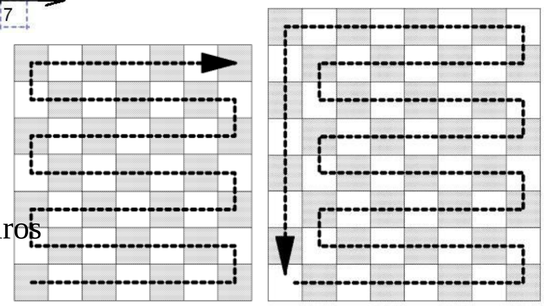


A partir do gráfico 2,
Observa-se que a area
minima sera obtida para
um raio igual a
3,15 cm.



Aplicando-se o raio determinado no gráfico 2 sobre o gráfico 1, obtém-se que a altura correspondente do cilindro será igual a **8 cm.**

Portanto as dimensões da etiqueta serão
8 cm × 19,8 cm
(comprimento calculado a partir da relação 2πR).

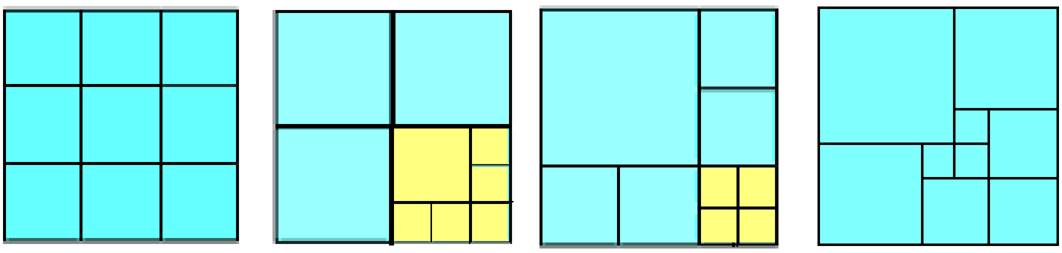


Questão 7 – *Retorno à casa de partida*, 7 pontos

Ao lado temos uma tentativa sem sucesso para um tabuleiro 7 × 7 e um caminho possível para um tabuleiro 8 × 8.
Pode-se concluir que o traçado será possível apenas para os tabuleiros de ordem par.

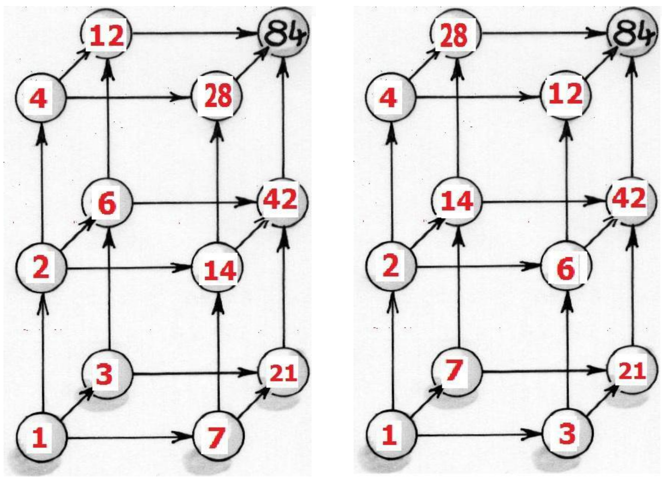
Demonstração da impossibilidade para os ímpares:
O número de passos a serem dados é sempre igual ao número de casas do tabuleiro e a cada passo a cor da casa se alterna. Consequentemente , se o número de casas for ímpar, a peça se encontrará sobre uma casa de cor diferente da casa da partida, sendo impossível retornar ao início.

Questão 8 – *Quatro por nove*, 5 pontos : Aqui estão as quatro soluções possíveis.



A partilha de quadrados tem sido objeto de pesquisas recentes, no século XX e XXI: http://www.squaring.net/

Questão 9 – *Rota indicada por setas* 7 pontos

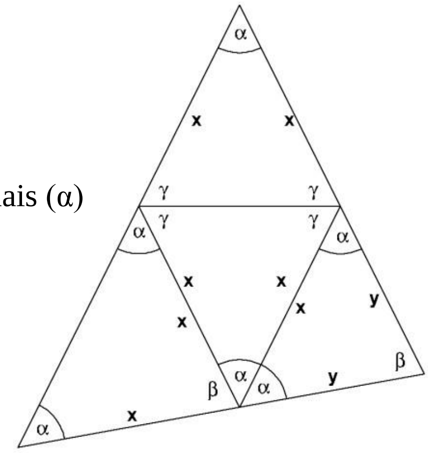


Fatorando-se o número 84, obtém-se que:

$$84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

Isso permite concluir que 84 tem exatamente 12 divisores o que determinará a maneira de se colocar as 12 bolas.
Há duas soluções simétricas.

Questão 10 – *Quatro para um*, 10 pontos



Ao lado temos as quatro peças do quebra-cabeça e sua disposição:
Como $\beta = 180 - 2\alpha$ e $\gamma = 90 - \alpha / 2$, os três lados da figura são perfeitamente alinhados, formando um triângulo.
Além disso, o triângulo também é isósceles porque tem dois ângulos iguais (α) e dois lados com a mesma medida (x+y).

Questão 11 – *Roleta*, 5 pontss

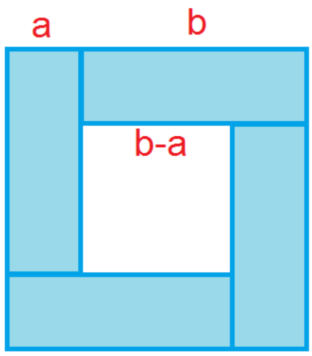
Seja n, o número total de intervalos e p o número de intervalos no setor branco.
Temos, então:

$$\frac{p+1}{n} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \frac{p-1}{n} = \frac{3}{10}.$$

de onde se conclui que p = 19 e n = 60.

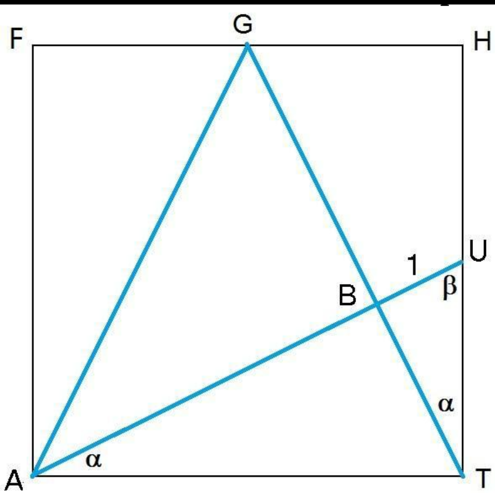
$$P(\text{preto}) = 1 - \frac{3}{10} - \frac{19}{60} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{20}}$$

Questão 12 – *Sanfona aos pedaços*, 7 pontos



Considere **a** e **b** como sendo as medidas da largura e do comprimento dos retângulos respectivamente.
O quadrado maior tem um lado (a+b) e
o quadrado menor (b-a).
Como a razão entre as áreas é igual a 4: $(a + b)^2 = 4 (b-a)^2$,
pode-se concluir que a razão entre os lados é igual a 2,
de modo: a+b = 2(b-a). Deduz-se que b = 3a.
Assim, as dimensões da folha que foi dobrada são **4a e 3a** .

Questão 13 - De cabo a rabo, 10 pontos



Existem várias maneiras de fazer esses cálculos.
Por exemplo, usando os ângulos:
Os triângulos TAU, HTG e FAG são isométricos, assim os ângulos TAU e GTH são iguais.
Considerando-se os ângulos complementares α e β, conclui-se que o triângulo é retângulo em B.
Temos: tg (α) =

$$\frac{UT}{AT} = \frac{1}{2} = \frac{BU}{TB} = \frac{TB}{AB}$$

De onde se deduz que BT = 2 cm, pois AB = 4 cm.
Os comprimentos dos seguimentos AU, GT e AG são iguais a 5 cm. **Portanto o comprimento total é igual a 15 cm.**

O problema também pode ser resolvido utilizando-se os Teoremas de Pitágoras ou de Tales.